MA1 – přednáška 21.10.2019

I. Příklady dalších „neurčitých výrazů" při určování limit funkce $f(x)^{g(x)}$, která je definována takto:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \quad \text{pro } x \in D_f \cap D_g,\ f(x) > 0$$

Je-li $a \in R^*$, pak $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}$

a (dle věty o limitě složené fce) stačí určit limitu $\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$. Zde se mohou objevit neurčité výrazy pro limitu součinu $\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$, tj. „$0\cdot\infty$", když

1) $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, tj. „$\infty^0$"

2) $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} f(x) = 0(+)$, tj. „$0^0$"

3) $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ a $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, tj. „1^∞".

Příklady: 1) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = „\infty^0" \underset{\text{def.}}{=} \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}$

když „tušíme", že $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$,

pak by $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0} e^t = 1$

(ale limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ zatím „neumíme" přesně)

2) $\lim_{x\to 0+} x^x = „0^0" \underset{\text{def.}}{=} \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = \ ?$

zde asi „netušíme", jak vyjde $\lim_{x\to 0+} x\ln x = „0\cdot\infty"$

(budeme znát pomocí derivací funkce)

3) $\underline{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = „1^{\infty}" \underset{def.}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$

$\underset{VLSF}{=} \lim_{u\to 1} e^{u} = \underline{e}$! („známá" limita)

<u>limita vnitřní funkce:</u>

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = „\infty\cdot 0" = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{VLSF}{=}$$
$\left(\frac{1}{x}=t\to 0+\right)$

$$= \lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+t)}{t} \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to 1}\frac{\ln(y)}{y-1} = 1$$ (minulá přednáška)

$1+t=y \Rightarrow t=-1+y$
$y\to 1$

II. <u>Definice limity funkce</u> – viz minulá přednáška
(tam jsou i příklady, jak pomocí definice „ověříme" naši „intuici" při dopočtu limit jednoduchých funkcí)

(na příští přednášce si ukážeme, jak se dokáže např. věta o limitě součtu a třeba věta o limitě složené funkce – tj. práci s definicemi při důkazu.)

III. <u>Limita posloupnosti reálných čísel</u> (stručně)

Posloupností (reálných čísel) rozumíme zobrazení (funkci)
$a: N\to R$; pro $n\in\mathbb{N}$ píšeme a_n (místo $a(n)$)
a posloupnost (celou) píšeme $a=\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$ nebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
(stručněji jen $\{a_n\}$)

Příklady posloupností:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \text{ ; dále třeba } \{q^n\}$$

$$\{\sqrt{n}\} \text{ ; } \{\sqrt[n]{a}\} \ (a>0) \text{ ; } \left\{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \text{ ; } \{\sqrt[n]{n}\}, \left\{\frac{1}{n!}\right\}, \left\{\frac{1}{2^n}\right\},$$

$$\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$$

Zajímavé (a důležité) je vyšetřování limit i u posloupností (a i užitečné).

Definice: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ $(\in \mathbb{R}, \pm\infty)$ – analogické jako definice $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, tj.:

Definice (vlastní limity posloupnosti):

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, $L \in \mathbb{R}$, když platí:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 : \ |a_n - L| < \varepsilon$.

Definice (nevlastní limity posloupnosti

$\lim a_n = +\infty$ (resp. $\lim a_n = -\infty$) když platí:

$\forall K$ (dost >0) (resp. $\forall K$ (dost <0)) $\exists n_0 \ \forall n > n_0$:

$a_n > K$ (resp. $a_n < K$)

Příklady:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ ; } \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ ;}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} e^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$$

Zde $a_n = f(n)$, a zřejmě, pokud ex. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) \overset{!}{=} L$.

Některé další důležité limity:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0 \iff |a| < 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ pro $a > 1$, $\{a^n\}$ pro $a \leqq -1$ limitu (asi) nemá!

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (z $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ – „u.mož")

(někdy se takto definuje číslo „e")

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (zatím neumíme, ale lze ukázat užitím věty o limitě sevřené posloupnosti)

Další příklady výpočtu limit posloupností (zde není $a_n = f(n)$, f – známá funkce)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$: $0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot 2 \cdots 2\cdot 2}{1\cdot 2 \cdots (n-1)\cdot n} \leq 2\cdot\frac{2}{n}$ – zde

„použití" odhad pro a podobné

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$: $0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} n! = +\infty$: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \geqq n$, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \implies \lim n! = \infty$

(Pro limity posloupností lze formulovat větu o limitě sevřené posloupnosti – zkuste sami)

Ale: $\{(-1)^n\}$ „asi" limitu nemá, stejně tak $\{(-2)^n\}$

Jak ukážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ nemá limitu?
(užitečné i pro neexistenci limity funkce)

Definice: $\{a_n\}$ posloupnost, $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ je posloupnost „vybraných" indexů, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá vybraná posloupnost (podposloupnost) z posloupnosti $\{a_n\}$.

Pak platí: Má-li $\{a_n\}$ limitu L $(\in R, \pm\infty)$, pak, je-li $\{a_{n_k}\}$ posloupnost vybraná, je $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$
(tj. každá vybraná posloupnost z $\{a_n\}$ má též limitu L)

Důkaz, že posloupnost limitu nemá – stačí najít dvě vybrané posloupnosti, které mají různé limity:

Př: $\{(-1)^n\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} (-1)^{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} 1 = 1$, ale
$\lim\limits_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} (-1) = -1$
$\Rightarrow$ $\{(-1)^n\}$ nemá limitu

analog. $\{(-2)^n\}$ nemá limitu: $\lim\limits_{k\to\infty} (-2)^{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} 4^k = +\infty$
$\lim (-2)^{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} (-2)4^k = -\infty$.

Poznámky: 1, Pro limity posloupností platí věty o aritmetice limit.
2) Limita posloupnosti je „využívaná" i při důkazech neexistence limity funkce.
Zatím víme: $a \in R$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \ (\in R, \pm\infty) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = L$,
tedy, pokud $\lim\limits_{x\to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-} f(x)$, f nemůže mít limitu v bodě $a \in R$.

Zatím jsme jen „odhadovali", že třeba funkce $f(x) = \sin x$ nemá limitu v bodě $+\infty$ (nebo $-\infty$). Jak se tohle dokáže? <u>Užitím následující věty:</u>

<u>Věta (Heine – 1872 pro spojitost funkce v bodě)</u>

f je spojitá v bodě $x_0 \in D_f \Leftrightarrow$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$ z D_f, pro kterou je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

<u>Věta (Heine) (pro limitu funkce)</u>

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ $(a \in \mathbb{R}^*, L \in \mathbb{R}^*) \Leftrightarrow$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$, pro kterou je $\lim x_n = x_0$ a $x_n \neq x_0$ $(n \in \mathbb{N})$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Stačí tedy najít dvě posloupnosti $\{x_n\}, \{\bar{x}_n\}$, $\lim x_n = \lim \bar{x}_n = a$, $x_n \neq a$, $\bar{x}_n \neq a$ $(\forall n)$ tak, že $\lim f(x_n) \neq \lim f(\bar{x}_n)$, pak f nemá limitu v bodě a.

(analog. pro jednostranné limity)

<u>Příklad:</u> fce $\sin x$ nemá limitu v $+\infty$:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= n\pi, \quad \lim(n\pi) = +\infty \text{ a } \lim \sin(n\pi) = \lim 0 = 0 \\ \bar{x}_n &= \tfrac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad \lim\left(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = +\infty \text{ a } \lim \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (teď už zcela „přesně") $\sin x$ nemá limitu v $+\infty$.

<u>Důležitá limita neboli limitní posloupnost</u>

$\{a_n\}$ je posloupnost daná – vytvoříme posloupnost $\{S_N\}$,

$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ – „sumace"

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{1}^{\infty} a_n \quad \text{(nekonečná řada)}$$

Definice. $\sum_1^\infty a_n$ konverguje, když existuje $\lim_{N\to\infty} \sum_1^N a_n$ a je konečná! (tj. $\lim_{N\to\infty} s_N = s \in R$)

($\lim_{N\to\infty} s_N = s$ se nazývá součtem nekonečné řady a píše se $\sum_1^\infty a_n = s$)

Jinak $\sum_1^\infty a_n$ diverguje (tj. $s = \pm\infty$ nebo když posloupnost $\{s_N\}$ limitu nemá.

(**Poznámka:** i o posloupnostech víte, že konvergují, když $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R$ a divergují, když $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ nebo žádnou limitu nemá)

(Řady se podrobněji vyšetřují až v Matematice A2)

Příklady nekonečných řad:

1) Ze střední školy je (asi) známo:

$$\underline{\sum_0^\infty q^n} = \frac{1}{1-q} \iff |q| < 1$$

(jinak řada $\sum_0^\infty q^n$ diverguje)

Dk.

$$\lim_{N\to\infty} s_N \underset{\text{pro } q\neq 1}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \iff |q| < 1$$

$$\text{pro } q = 1 \qquad s_N = \underbrace{1+1+\dots+1}_{N\times} = N \to \infty$$

(pro $q > 1$ je $\lim s_N = +\infty$

pro $q \leq -1$ $\{s_N\}$ limitu nemá – říkáme, že řada $\sum_0^\infty a_n = \sum_0^\infty q^n$ osciluje)

2) „Známé" řady: (i) $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (Eulerovo číslo, $0! = 1$)

(ii) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ je konvergentní řada $\Leftrightarrow$ $p > 1$ $(p \in N)$

(iii) spec. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler 1736)

Poslední „poznámka"

Vyšetřování konvergence řad je dosti „jiné" než výpočet limit posloupností nebo funkcí, jak se nám dařilo dosud. Až na výjimky se neurčí limita výpočtem (tj. limitou posloupnosti částečných součtů), ale pomocí tzv. kriterií konvergence řad se většinou daří zjistit aspoň, zda daná řada konverguje, nebo diverguje (a pak limitu můžeme „vypočítat" přibližně – aproximovat – (viz definice limity posloupnosti) s požadovanou přesností, v případě, že řada konverguje). Zde jsou důležitá tvrzení o existenci limity a konečnosti (nekonečnosti) příslušné limity.

Věta. Nechť $\{a_n\}$ je neklesající posloupnost, tj. $\forall n \in N: a_n \leq a_{n+1}$.
Pak a) je-li $a_n \leq c$ $\forall n \in N$ (tj. $\{a_n\}$ je shora omezená), pak posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n \in R$;
b) není-li $\{a_n\}$ shora omezená, je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Analogicky pro $\{a_n\}$ nerostoucí posloupnost, tj. $\forall n \in N: a_n \geq a_{n+1}$:
a) je-li $\{a_n\}$ zdola omezená, tj. ex.-li $c \in R$ tak, že $a_n \geq c$ pro $\forall n \in N$, ex. $\lim_{n\to\infty} a_n \in R$ (posloupnost $\{a_n\}$ konverguje)
b) není-li $\{a_n\}$ zdola omezená, je $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Odtud se dá dokázat velmi užitečné kritérium konvergence řad (ukážeme aspoň jako příklad „práce" s nekonečnými řadami):

Věta (srovnávací kritérium konvergence pro řady s nezápornými členy)

Nechť 1) $0 \le a_n \le b_n$ pro všechna n přirozená;

2) $\sum_1^\infty b_n$ konverguje.

Pak i $\sum_1^\infty a_n$ konverguje.

Naznačení důkazu: (i) označme-li $\{s_N\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_1^\infty a_n$, pak $\{s_N\}$ je neklesající posloupnost

(ii) z 1) plyne, že ($\sigma_N = \sum_1^N b_n$) pro každé N přirozené je $s_N \le \sigma_N$

(iii) každá konvergentní posloupnost je omezená (tj. omezená zdola i shora)

a tedy máme: pro každé N přirozené je $s_N \le \sigma_N \le C$, a tedy ex. $\lim_{N\to\infty} s_N$ konečná, tj. $\sum_1^\infty a_n$ je konvergentní.

Příklad užití srovnávacího kritéria: – pro řadu $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$:

1) $\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n(n-1)}$ pro $n \ge 2$

2) $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n-1)} = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ a částečný součet této řady

$\sigma_N = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}$ (pro $N \ge 2$), tj.

$\sigma_N = 1 - \frac{1}{N}$, $\lim_{N\to\infty} \sigma_N = 1$, a tedy řada $\sum_2^\infty \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje,

tedy (dle srovnávacího kritéria) konverguje i $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$.

(že součet je $\frac{\pi^2}{6}$ ale hodně „složité" – nebudeme zde „umět")